受験番号	

（受験番号を記入すること）

2022 年度

東京大学大学院工学系研究科

航空宇宙工学専攻　入学試験問題

専門科目　（午前）

時間：　９:００～１２:００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この冊子を開かないこと．
２．４科目中３科目を選択して解答すること．
３．解答用紙３枚が渡されるので，１科目ごとに１枚の解答用紙を使用すること．
４．解答用紙には，科目名及び受験番号を記入すること．
５．解答用紙及び問題冊子は持ち帰らないこと．

流体力学（午前）

境界層吸い込みは，航空機まわりの流れを制御する手法の一つである。ここでは，非圧縮性粘性定常流れ中に一様流に対して角度 0°でおかれた半無限長の二次元平板上に発達する層流境界層について考える。図 1 に示されているように，x-y 座標系を定義し，x 軸と y 軸に沿った流速成分を，それぞれ U, V で表す。一様流速度を U_∞とし，平板表面に沿って圧力勾配は存在しないとする。平板の全域にわたって多数の微小な孔が設けられており，平板下方に置かれた吸い込みポンプによって一定速度 V_0 (>0)での吸い込みが平板の表面全域にわたって均一に行われている。すなわち $y=0$ において，$U=0$，$V=-V_0$ が成り立つ。空気密度を ρ，動粘性係数を ν とする（共に一定）。以下では，添字 0 は板表面（$y=0$）を意味する。添字 f は，前縁から十分に離れた下流での x 位置を表す。以下の問いに答えよ。

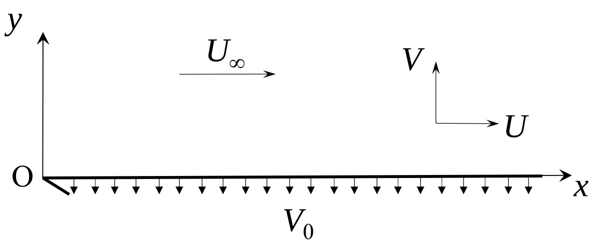

図 1

第 1 問　この半無限長平板の前縁から十分に離れた下流での層流境界層について考える。

1. 次に示す(1)式と(2)式を用いて，速度分布 $\left(\dfrac{U}{U_\infty}\right)_{\mathrm{f}}$ を y の関数として求めよ。前縁から十分に離れた下流における流れの特性は x に無関係と考えてよい。

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad (2)$$

ここで P は圧力である。

2. 排除厚さ δ^*_{f} と板表面における粘性せん断応力 $(\tau_{\mathrm{f}})_0$ を求めよ。排除厚さの定義は

$\delta^* \equiv \int_0^\infty \left(1-\dfrac{U}{U_\infty}\right)\mathrm{d}y$ である。

（次ページへ続く）

第 2 問　前縁と前縁から十分に離れた下流の間で発達するこの層流境界層の速度分布を近似的に得ることを考えたい。そこで，この境界層の速度分布 $\dfrac{U}{U_\infty}=g(\xi)$ を $\xi=\dfrac{y}{\delta^*}$ の関数として表す。前縁では，主流方向に圧力勾配がなく吸い込みも行われていない平板上に形成される Blasius 型層流境界層の速度分布 $F_{\mathrm{B}}(\xi)$ を上流方向への極限形として与える。また第 1 問で扱った層流境界層の速度分布 $F_{\mathrm{f}}(\xi)$ を下流方向への極限形として与える。両者の間を内挿する形で，一般化された速度分布は(3)式のように表わされる。K はパラメータであり, x の関数である。

$$\frac{U}{U_\infty}=g(\xi)=(1-K)F_{\mathrm{B}}(\xi)+KF_{\mathrm{f}}(\xi) \qquad (3)$$

ここで $(g')_0$ と $(g'')_0$ はそれぞれ $\xi=0$ における $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi}$ と $\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\xi^2}$ の値を表すとしたときに，$(g')_0$ と $(g'')_0$ の間に成り立つ関係式を(2)式を利用して求めよ。

第 3 問　K は ξ に依らないと仮定して(3)式を微分することによって，板表面において成り立つ以下の式が得られる。なお，$(\ )'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\ )$ である。

$$(g')_0=(1-K)(F_{\mathrm{B}}{}')_0+K(F_{\mathrm{f}}{}')_0 \qquad (4)$$

$$(g'')_0=(1-K)(F_{\mathrm{B}}{}'')_0+K(F_{\mathrm{f}}{}'')_0 \qquad (5)$$

1. $(F_{\mathrm{f}}{}')_0$ と $(F_{\mathrm{f}}{}'')_0$ を求めよ。

2. $(F_{\mathrm{B}}{}'')_0=0$ であることを利用して，$\dfrac{V_0\delta^*}{\nu}=\dfrac{K}{a+(1-a)K}$ が成り立つことを示せ。ここで $a\equiv(F_{\mathrm{B}}{}')_0$ である。

固体力学（午前）

当問題では微小変形の球対称問題を考える。平衡方程式は体積力を無視できる場合,

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{2(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}=0 \qquad \cdots\cdots (1)$$

ひずみと変位の関係は,

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}\ ,\qquad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r} \qquad \cdots\cdots (2)$$

と表すことができる。ここに, r は中心からの距離, σ_r, σ_θ はそれぞれ半径方向, 周方向の応力, ε_r, ε_θ はそれぞれ半径方向, 周方向のひずみ, u は半径方向の変位である。

第１問　ε_r, ε_θ が満足すべき適合条件式を求めよ。

第２問　フックの法則が成り立つ弾性体では, A, B を任意の定数として, 応力の一般解が次式で表されることが知られている。

$$\sigma_r=A+\frac{2B}{r^3}\ ,\qquad \sigma_\theta=A-\frac{B}{r^3} \qquad \cdots\cdots (3)$$

この式が (1) 式の平衡方程式を満足することは明らかである。いま, ヤング率を E, ポアソン比を ν として, 球対称問題におけるフックの法則を書き下し, (3) 式が第１問で求めた適合条件式を満足することを示せ。

以下では半径 a の球形の空孔を有する物体を考える。この物体はミーゼスの降伏条件に従う弾完全塑性体で, 弾性変形時のヤング率を E, ポアソン比を ν, 単軸引張時の降伏応力を Y とする。また, a は物体の大きさと比べて十分に小さいとする。ここに,「ミーゼスの降伏条件に従う弾完全塑性体」とは, 相当応力 σ_{eq} が Y になると降伏し, 塑性変形域内では $\sigma_{\mathrm{eq}}=Y$（一定値）となることを意味する。なお, 相当応力 σ_{eq} は, 3 つの主応力を σ_1, σ_2, σ_3 として, 次式で定義される。

$$\sigma_{\mathrm{eq}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \qquad \cdots\cdots (4)$$

第３問　空孔内で p なる内圧が作用するとき, 弾性変形時における応力分布を求めよ。また, p を徐々に大きくする場合, 降伏が始まるときの p の値（ p_{Y} とおく）を求めよ。

（次ページへ続く）

第４問　$p > p_{\mathrm{Y}}$ のとき，弾塑性境界を $r = c$ とすると，$a \leq r \leq c$ の領域は塑性変形域，$r \geq c$ の領域は弾性変形域となる。$r = c$ における σ_r の値を求めよ。

第５問　第４問で $p = Y$ のとき，c の値，および，$a \leq r \leq c$ と $r \geq c$ の各領域における応力分布を求めよ。

第６問　$p = Y$ の状態から p を零にしたときの残留応力分布を求めよ。ただし，バウシンガー効果は考慮しなくてよい。

第７問　この物体がトレスカの降伏条件に従う弾完全塑性体の場合，第３問～第６問の結果はどうなるかを理由とともに簡単に述べよ。

航空宇宙システム学（午前）

地球低軌道（円軌道）から出発する深宇宙探査機の地球脱出を，電気推進のような微小推力のスラスタで実施することを検討する。地球低軌道から，連続的にスラスタを噴射して軌道半径を徐々に高めていき，多周回後に地球重力圏を脱出するミッション（スパイラル上昇と呼ぶ）を考えるとき，以下の問いに答えよ。運動はすべて，軌道面内のみを考慮するものとする。

第 1 問 地球低軌道（円軌道）の軌道半径をr，地球の重力定数をμとするとき，円軌道の軌道速度v および軌道周期Tを求めよ。また軌道の力学的エネルギーEが以下の式で表されることを示せ。

$$E = -\frac{\mu}{2r}$$

第 2 問 第 1 問の地球低軌道を出発軌道とし，微小推力スラスタが一定加速度aで連続的に噴射され，その噴射方向は常に軌道の接線方向に制御されるものとする。軌道一周あたりの軌道変化は小さく（図 1 参照），近似的に円軌道まわりに線形化された以下の方程式に従うものとする。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2\omega\frac{dy(t)}{dt} - 3\omega^2 x(t) = 0$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\omega\frac{dx(t)}{dt} = a$$

ここで$x(t)$は動径方向，$y(t)$は接線方向の位置であり，ωは参照軌道（円軌道）の角速度である。時刻$t = 0$において，参照軌道上にいた探査機（つまり$\frac{dx(0)}{dt} = \frac{dy(0)}{dt} = x(0) = y(0) = 0$）の 1 周期後の高度変化$\delta r(T) = x(T) - x(0)$を求めよ。また，1 周期後の軌道が円軌道になっていることを示せ。

第 3 問 軌道一周あたりの累積増速量を$\delta v = aT$と置く。第 2 問から求まるδrとδvの関係を用いて，軌道半径rの円軌道から軌道半径R（ただし$R > r$）の円軌道にスパイラル上昇にて遷移する際に必要な総増速量（ΔV）を求めよ。

第 4 問 微小推力スラスタによるスパイラル上昇にて地球低軌道から地球重力圏を脱出（$R \to \infty$）する電気推進宇宙機と，大推力のロケットエンジンにより地球低軌道から瞬発的に 1 回のΔV を実施することで地球重力圏脱出軌道に遷移する通常のロケットを比較する。電気推進宇宙機が地球圏脱出に要するΔV は，通常のロケットが地球圏脱出に要するΔV の何倍か。

（次ページへ続く）

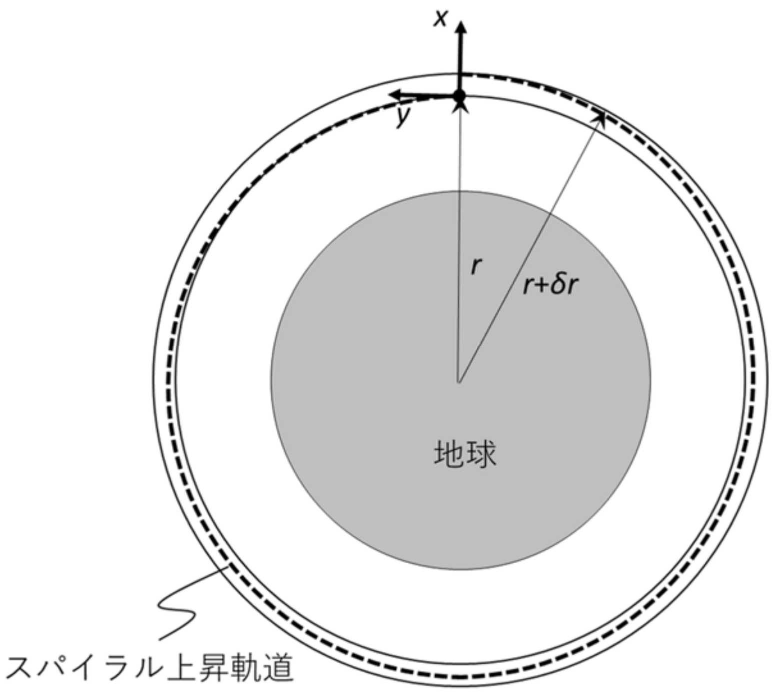

図１

推進工学（午前）

図１のように半径a, 質量mの軸対称で剛な物体を水平面上に静止させておき，中心Oからhだけ上の点に時刻$t = 0$に撃力Pを水平に加える。ただし，撃力の作用点と物体の重心は同じ鉛直面内にあり，物体の密度は一様である。

第１問 以下のそれぞれの場合について，この軸対称物体が滑ることなく転がるための h を求めよ。

1. 軸対称物体が円板のとき。
2. 軸対称物体が球のとき。
3. 軸対称物体が薄い球殻のとき。

以降の問いにおいて，任意の h $(0 \leq h < a)$ について検討せよ。ただし，軸対称物体と水平面の間の動摩擦係数をμ, 重力加速度をg, 回転軸まわりの慣性モーメントをIとする。

第２問 撃力を加えた後の軸対称物体の重心の移動速度$u(t)$, および回転角速度$\omega(t)$を時間の関数として求めよ。

第３問 軸対称物体が図１に示す高さH $(0 \leq H < a)$の段差を乗り越えるための撃力Pの条件を求めよ。ただし，段差に到達するまでに軸対称物体は滑ることなく転がり始めており，その後の軸対称物体と水平面の間の摩擦はなく，軸対称物体は段差の角で滑りもはねかえりもしない。

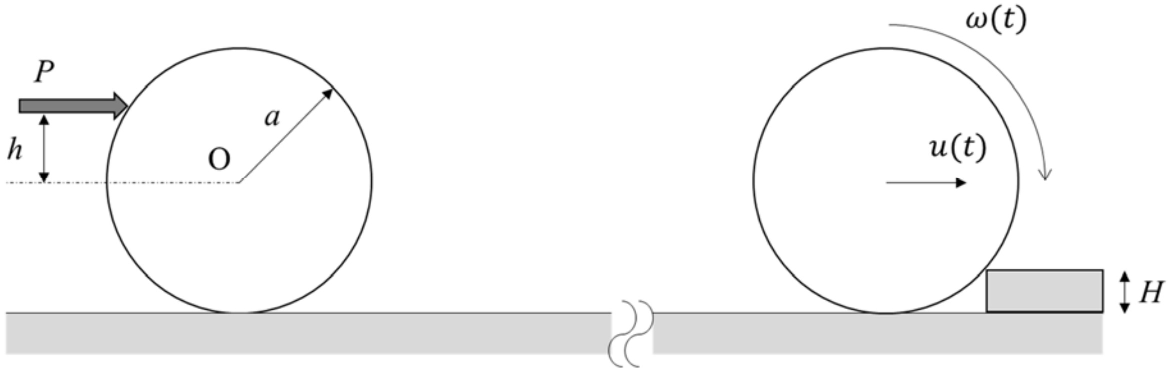

図１